1. **Первообразная функции и неопределенный интеграл.**

**Опр:** ф-ия F наз первообразной ф-ии f(x) на пром <a,b> если F(x) дифф на <a,b> и на <a,b> выполн: F’(x) = f(x)

**Замеч:** первообр любой ф-ии непрерывна, тк она дифф-ма. Первообр не однозначна

**Т:** для того, чтобы 2 дифф на пром <a,b> ф-ии F1(x) и f2(x) были первообр для одной и той же ф-ии необх и доста чтобы они отлич на конст: F2(x) = F1(x) + C

**Док:** (необх) F2=F1+c -> обе первообр. Пусть F’1 = f, те F1-первообр. Рассм F’2 = F’1+C’ = F’1+C’(->0) = f -> F2 -первообр

(дост) F1,F2 -> отлич на конст. Рассм (F2-F1)’ = F’2 – F’1 = f-f = 0. По следств т-мы Лагранжа ес f’=0 то самая ф-ия=С F2-F1 = C -> F2=F1+C◄

**Следств:** F-перв f, то F+C опр мн-во всех первообр f

**Опр:** мн-во всех первообр на <a,b> наз неопр интегралом от f и обознач

**Следств:** если F(x) нек первообр, то

1. **Свойства неопределенного интеграла**

**Т:** пусть сущ. На <a,b>. Тогда на этом пром: (1)(2) *.*

**Док:** (1) из опр: (2) dy=y’dx 🡪 ***◄***

**Т:** Если F(x) дифф на <a,b>, то

**Док:** ◄

**Т(св-во лин):** ] на <a,b> сущ НИ(неопр интгр)

**Док:** это рав-во двух ф-ий: ] F’(x)=f(x);G’(x)=g(x); αF(x)+βG(x)+C, C € R; вычисл произв: (αF(x)+βG(x)+C)’ = αf(x)+βg(x). Это подинтегральная ф-ия левого выр-ия, тем самым это мн-во всех первообр, те НИ ◄

**Замеч:** В опр НИ не искл, что само х может явл ф-ией некоторой другой пер-ой  
геом-ки НИ – это семейство кривых y=F(x)+C

**3) Метод интегрирования подстановкой (замена переменной). Внесение под знак дифференциала. Интегралы ∫tg xdx и ∫ctg xdx .**

**Т:** ] на <a,b> сущ НИ ∫f(x)dx, а φ(t): <α,β> -> <a,b>, дифф на <α,β>. Тогда ∫f(x)dx= ∫f(φ(t)) φ’(t) dt.

**Док:** ] F(x) – первообр f(x) на <a,b>. По Т о произв слож ф-ии: F(φ(t)) – первообр ф-ии f(φ(t)). F’(φ(t))=F’\*φ’ = f’\*φ’ ◄

**Замеч:** Эту формулу часто используют права налево. При этом новую переменную не выписывают явно. В этом случае говорят введение под знак дифференциала.

**4) Метод интегрирования по частям.**

**Т:** ] ф-ии u=u(x) v=v(x) дифф на <a,b> и на пром. Сущ НИ ∫vdu, тогда на пром. Сущ НИ ∫udv = uv-∫vdu.

**Док:** по правилу дифф d(uv)=vdu+udv; u’dx = du ; v’dx = dv; udv=d(uv) – vdu <- интегрир. ∫udv = ∫d(uv) - ∫vdu ◄  
**замеч**: примене этой формулы целесообр когда ∫vdu сущесвт-но проще чем ∫udv  
Применяют для Р(х) многочлен. , 2) 3)

**5)Интегрирование рациональных дробей**

**Опр:** ф-ия вида Pn(x)=a0+…+anxn наз. Многочленом

**Т:** мн-ен Pn(x) может быть представл в виде: , где x1…xp – корни мн-на, k1+…+kp+2(l1+…+lz)=n. .

**Опр:** ф-ия вида наз рац. дробью, если n<m, то дробь правильная. Иначе можно выделить целую часть

**Зам:** дроби вида наз. простейшими (

**Т:** прав рац др можно предств единств обр в виде сумм. Если .

**Интегр прост рац дрб**

1. . Замена:

**6) Определение опр-го интгр. Пример**

**Опр:** гов, что на [a,b] введ разбиение , если введ. cист. точек таких что a=x0<x1<…<xn=b. При этом введен обознач

**Опр:** велич λ(τ) = max(Δxi) наз **рангом разбиения**

**Опр:** гов, что на [a,b] введ. оснащ разбиение (τ,ζ) , если на отрз введ разбиение τ и выбран сист точек

**Опр:** ] на [a,b] задана ф-ия f(x) и введ разбиен (τ,ζ). Величина наз **интегральной суммой** для ф-ии на отрезке, отв разбиен соотв (τ,ζ)

**Опр:** ] на [a,b] задана ф-ия f(x). Гов, что число I явл **интегралом Римана от ф-ии** , если . Пишут   
**Замеч**: C нек уточнен опр означ, что a ,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,b (отр).  
**Опр**: Ф-я f(x), для кот сущ интегр Римана на [a,b] наз интегр по Риману на этом отр, обознач . a – нижний предел интегр, b - верхний предел интегр, f(x) - подынтегр ф-я. f(x)dx - подынтегр выраж, [a,b] - область интегрир, I - опр интегр.  
**Замечание**: при очень похожих обознач опр и неопр интегр это существенно разные понятия. Неопр интегр - семейство ф-й (первообр). Опр интегр – число. **Опр**: (дополн)

**7) Геометрический смысл определенного интеграла.**

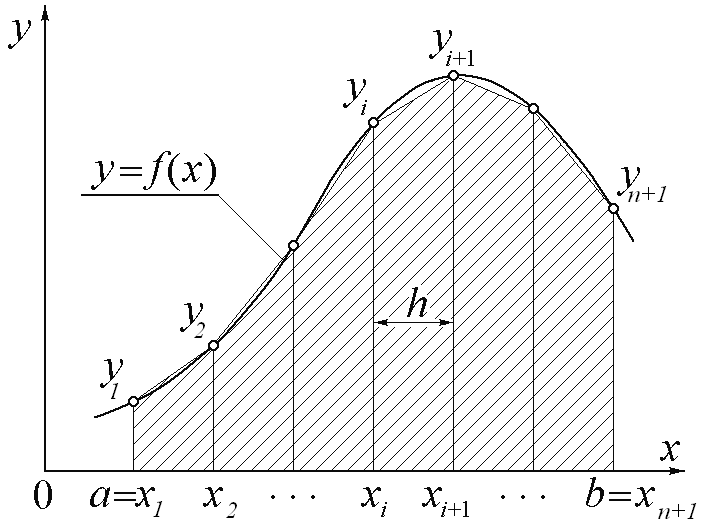
**Общие сведения:**

**опр**: пусть f(x) задана на [a,b] говорят, что число 工является интегралом Римана от ф-ии f(x) на отрезке [a,b] если:

пишут:

**Замечание**: с некоторыми уточнениями Опр означает, что

a ,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,\_,b (это типа рисунок отрезка)

**опр**: ф-ия f(x), для которой существует интеграл Римана на [a,b] называется интегрируемой по Риману на этом отрезке, обозначается ; a - нижний предел интеграла; b - верхний предел интеграла ;

f(x) - подынтегральная ф-ия; f(x)dx - подынтегральное выражение ; [a,b] - область интеграла;

工 - определенный интеграл

**Геометрический смысл**

f(x)≥0 на [a,b]

суммируем площади прямоугольников.

при n→∞ исчезает площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями f(x), y=0, x=a, x=b.

**8) Необходимое условие интегрируемости. Достаточные условия интегрируемости.**

**Т(необх усл интгр):**  ] f(x)€R[a,b] (интегрируема), тогда f(x) – ограничена на [a,b]

**Док:** от противного: допуст, что f(x) не огранич. Найдется такой пром-ок Δi ↄ C. При выборе ζi всегда можем получить какое угодно знач f(ζi). Тогда и στ (f,ζ) принимает любое знач. Тогда конеч пред-ла не сущ 🡪 f(x) не интегрируема◄

**Т(достат усл интгр):** ] f(x) € C[a,b] 🡪 f(x) € R[a,b]

**Т:**  f(x) – огранич и имеет может быть конечн число разрывов, то она интегрируема

**Т:**  если f(x) монотонна, то она интегрируема

**9)Основные свойства определенного интеграла.**

**1. Св-во линейности:**  α,β € R, f(x), g(x) € R[a,b]. 🡪

**Док:** переход к пределу при λ(τ)🡪0

**2.Св-во связ с промеж**

f(x) € R[a,b], ] [c,d] € [a,b] 🡪 f(x) € R[c,d]. c € R[a,b]:

**3.**

**10. Интеграл с переменным верхним пределом**

f(x) € R[a,b] 🡪 f(x) € R[a,x] где x € [a,b]

**Опр:**  ф-ия наз **интегралом с переменным верхним пределом**

**Т(1):** Ф(х) непрерывна

**Док:**  🡪 ◄

**Т(2):** ∀ x0 € [a,b]

**Док:**  = = f(. Если ◄  
**Следст.** Если , то она имеет первообразную Ф(х) = .

**11) Формула Ньютона-Лейбница**

**Т:** ] f(x) € R[a,b], F(x) – нек. первообр для f(x). Тогда опр интгр равен:

**Док.**

.

**12) Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.**

**Т(замена):**

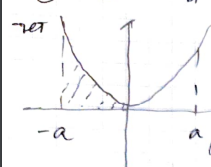
**Док:** ] F’(x) = f(x), вычисл произв: (F( φ(t) ) )’ = F’(x)φ’(t) = f(φ(t))φ’(t). Тогда (F(φ(t))’ – первообр для f(φ(t))φ’(t). По Ф Н-Л: ◄

**Т(по част):**  ] u(x), v(x) непрер и дифф ф-ии. Тогда

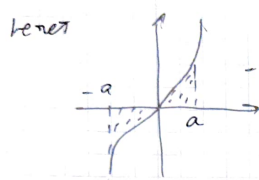
**Док:** d(uv) = du\*v+dv\*u; ◄

**13)** **Свойства определенного интеграла от четной, нечетной и периодической функций.**

**Т:** (на симм отрезке)

**Док:**

. ◄

**Т:** (на симм отрезке)

**Док:** <-a,a>; **,** . тогда ◄

**Т:** ] f(x) € R[0, T], f(x) периодическая с периодом Т. Тогда на любом а:

**14) Численное интегрирование**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Средних прямоугольников  **Изображение выглядит как текст, вычерчивание линий  Автоматически созданное описание** | Формула трапеций | Формула парабол |
|  | n->беск R->0 |  |
| Оц-ка погрешности: | Оц-ка погрешности: |  |

**15) Понятие площади плоской фигуры. Площадь фигуры в различных системах координат.**

**Изображение выглядит как вычерчивание линий

Автоматически созданное описаниеОпр:** под плоской фигурой будем понимать любое мн-во точек на плоскости

Qb Обознач SQb – Pb, Q0 – P0 и рассм мн-во всех таких площадей {Pb} – огр сверху sup{Pb} = P .Мн-во {P0} тоже огр снизу inf{P0} = 0 **Т**: Р (вписан. ≤ опис.)

**Док** от противного: допустим Р , по опр-ию supPвпис ≤ Р , по опр-ию infРопис.

**Изображение выглядит как вычерчивание линий

Автоматически созданное описание**

**опр**: если Р= Р , то говорят, что G - квадратична, Р - площадь G.   
пример: не квадратичной фигуры Р=0, 1

**Т**:для того, чтобы G была квадрируема, необходимо и достаточно, чтобы для существовала Ро, Рв: Ро-Рв<Ɛ

**необходимость**: G - квадрируема ⇒ Ро-Рв<Ɛ Р = Р, по опр-ию sup: ∃Рв: Р - Рв<, по опр-ию inf ∃Ро: Ро - < , Р - Рв + Ро - < Ɛ, Ро-Рв<Ɛ ◄

**достаточность**:существует Ро-Рв<Ɛ Рв ≤ Р ≤ ≤ Ро, 0 < - Р < Ɛ. В силу произвольности , Ɛ P-P=0 Р = Р G – квадрируема ◄

**Т:** пусть f(x)≥0 на [a,b] и f(x) - непрерывна, тогда криволинейная трапеция ограничена: f(x), x=a, x=b, y=0, квадрируема. если нет ограничений на f(x) (по знаку). В общем случае, если трапеция ограничена y=f1(x), y=f2(x), x=a, x=b:

**ПДСК** x = φ(t), y = ψ(t) α <= t’<=β **Полярная:** x = r(φ)cosφ y = r(φ)cosφ x’=r’(φ)cos – r(φ)sinφ

**16) Понятие длины кривой. Длина кривой в различных системах координат.**

**Опр:** пусть ф-ия задана и множеством точек. {M(x,y)} такое, что каждая из них получается только при одном значении t. Его называют **простой незамкнутой кривой** если - концы кривой. если А=В - **кривая замкнута.**

Введем разбиение r на [α,β], на n отрезке {M;(x,y)} соединим их ломаной. обозначим ранг дробления △li - **длина звена ломаной** и **длина всей ломаной**

**опр**: **пределом длины ломаной**  будем называть число , если:

. в этом случае говорят, что кривая спрямляема, а l её длина

**Т**: Пусть кривая задана непрерывны и дифференцируемы, тогда: , ,

**ПДСК:** ф-ия задана явно y = f(x) a<=x<=b. f(x) непрер и дифф x=t; y=f(x)

**Полярная:** r = r(φ) φ1 <= φ <= φ2

{x=r(φ)cosφ y=r(φ)sinφ} {x’ = r’(φ)cosφ – r(φ)sinφ y’ = r’(φ)sinφ + r(φ)cosφ}

.

**17) Интеграл с бесконечными пределами интегрирования. Интеграл от неограниченной функции.**

**Опр:** если сущ , то его обозначают и наз **несобственным интегралом первого рода**

**Т:** если предел конечн, то гов, что интеграл сходится, иначе расходится

*;* Такой интеграл сходится, если сходятся оба интеграла

**Интеграл от неогранич ф-ии:** f(x) на [a,b). Для любой δ > 0 существует. (в точке b ф-ия уходит в бесконечность)

**Опр:** несобств интеграл 2 рода на [a,b) наз если он сущ. на (a,b]

Пусть c € (a,b). Тогда

**18) Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов.**

**Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание**

**док-во**: Если предел сущ то нач с некот х выполнено;

◄

**19) Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.**

**Опр:** гов, что интеграл сходится **абсолютно** если сходится

**Опр:** Если расходится, а сходится, то говорят, что он сходится **условно**

**Т:** если сходится, то и сходится (в обратную сторону не работает).

**20) Метрическое пространство. Открытые и замкнутые множества. Последовательности точек. Определение предела. Критерий сходимости**

**Опр:** мн-во Х наз **метрическим пр-вом** , если для каждой пары x,y определ число ρ(x,y) удвол-щее след аксиомам:

1. ρ(x,y) >0
2. ρ(x,y) = 0 <-> x=y
3. ρ(x,y) = ρ(y,x)

**Опр: шаром** с центром в т. а (т. в пр-ве) и радиусом r будем наз. мн-во точек Sn(a) = {x|ρ(x,a)<r }

**Опр:** точка M0 € M наз **внутренней точкой мн-ва М**, если сущ Sε(M0 ) € Μ

**Опр:**  если int(M) = Μ, мн-во наз **открытым** // int(M) – мн-во всех внутр точек мн-ва М

**Опр:** мн-во М наз **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки //пред точка М0 – точка в люб окр которой содержатся точка м-ва М отличная от М0

**Опр:**  если каждому натур числу поставл в соотв точка мн-ва вход в **R** , то гов что задана **посл-ть**

**Опр:** т А € **R** наз **пределом посл-ти** {Mn} если

**Т:** посл-ть точек {Mn(x1(n) …….xk(n)} сходится к А <-> посл-ти {x1n},… сходится соотв-но к a1….ak

**Т(крит сход посл):** для того, чтобы послед {Mn} сход необх и достат, чтобы она была фундамент.

**Док:** посл фунд 🡪 {xn}… тоже фундам. По крит Коши для числ послед: она сход: и так далее. По первой теореме М сходится

**22) Частные производные, их геометрический смысл. Дифференцируемость функции многих переменных. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.**

**Опр:**  ФМН дифф-ма, если ее полное приращ можно представ в виде z=A1Δx1 +...+AnΔxn + α1Δx1 + ... + αnΔxn , где А – нек числа, а α – бм

**Т(необх усл дифф-сти):** если ф-ия z = f(M) дифф в М, то сущ-ют частные производные по каждой переменной

**Док:** пусть все Δхi = 0 , Δxk =/= 0. Тогда Δz = AkΔxk + αkΔxk = Δzxk (приращ по одной переменной) : сущ-ет предел *,* значит существует ◄

**Т(достат усл дифф-сти):** если в т. М и нек ее окр сущ част проивз, кот в самой точке непрерывны, то ф-ия дифф-ма

**Док:** рассм ф-ию 2х переменн z=f(x,y). запиш полн приращ: Δz = f(x+Δx, y+Δy) = f(x+Δx, y) + f(x, y+Δy) = по т Лагранжа = z’x(c; y+Δy) + z’y(x, d). по опр непрерывности: . 🡪 ◄

**21) Предел ФМП. Теоремы о пределах. Непрерывность ФМП. Основные теоремы о непрерывных функциях.**

**Опр(коши):** гов, что число А есть **предел ф-ии f(M)** M🡪M0 (в т. М0) если

**Опр(гейне):** гов, что число А есть **предел** ф-ии если соответств {f(Mm)} 🡪 A

**Опр:** если , то f(M) – бм

**Т:** если f(M) g(M) опред на {M} и , то

**Опр:** гов, что ф-ия удовл услов Коши в т. М0 если

**Т(кр Коши):** для того, чтобы ф-ия имела предел в т М0 необх и достат чтобы она удовл услов Коши

**Опр:**  ф-ия наз непрер в т А если

**Основные теоремы о непрерывных ф-иях:**

**Т:** если ф-ии f(M) g(M) определ на м-ве {M} и непрерывн в т. А, то f(M)+-g(M), f(M)\*g(M), f(M)/g(M) непрерывн в т. А

**Т:** пусть ф-ии x1 = φ1(t1…tk) = φn(t1…tk) непрерыв в т. А(а1…ак), а ф-ия z=f(x1…xn) непрер. в точке Β(φ1(а1…аk), φn(а1…аk)). Тогда сложная ф-ия z = f(φ1(t1…tk), …. , φn(t1…tk) ) непрерыв. в т. А(а1…ак)

**Т:** Если функция z=f(x1…xn) непрерывна в точке A и f (A ) > 0 , то ∃δ -окрестность точки A, в которой f (M)> 0 .

**Т:** Пусть функция f (М ) непрерывна на связном множестве {M}, пусть ∀ M1,M2 ∈{M} и f(M1)=z1, f(M2) = z2. Пусть z0 ∈[z1,z2]. Тогда на любой непрерывной кривой L , соединяющей точки M1 M2, и L ⊂{M} , найдется точка M0: f(M0) = z0.

**Опр:** ф-ия z=f(M) наз **ограниченной** на {M} если сущ C1,C2: any M ∈{M} 🡪 C1 <= f(M) <= C2

**Т(1ая Вейерштрасса):** если ф-ия f(M) непрерывна на замкнутом огранич мн-ве, то она ограничена на этом м-ве

**Опр:** число U наз. **точной верхней гранью** ф-ии z=f(M) на {M}, если

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст

Автоматически созданное описаниеОбозначают

Аналогично определяется инфимум (**точная нижняя грань**)

**Т(вторая Вейерштрасса):** Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

**Т(Кантора)** Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.

**23) Дифференцируемость сложной функции. Дифференциал.**

**Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание**

**Изображение выглядит как текст, человек, документ

Автоматически созданное описание**

**Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание**

**Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание**

**24) Касательная плоскость и нормаль к поверхности.**

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим

Эта формула задаёт в пространстве поверхность

Проведём в точке плоскость

Геометрический смысл частной производной – тангенс угла наклона прямой

Аналогично ---

**Опр.** Плоскость P, содержащая прямые , будем называть **касательной плоскостью к поверхности** S в (

Плоскость

Изображение выглядит как текст, доска

Автоматически созданное описание

.

1. Нормаль

**Опр.** Прямая перпендикулярная касательной плоскости и приходящаяся через точку ( называется нормалью к поверхности в этой точке.

.

Если поверхность задана неявно

**25) Производная по направлению. Градиент.**

1. Производная по направлению

Изображение выглядит как текст, документ

Автоматически созданное описание

– скорость изменения ф-ии в направлении оси Ох .

Рассмотрим некоторое направление : вектор

Рассмотрим точки, лежащие на :

.

**Опр.** Производной по направлению наз. (если существует) Обозначают:

Зададим прямую параметрически:

.

.

1. Градиент

**Опр.** Градиентом ф-ии в точке (называется вектор

Рассмотрим

Градиент это направление максимального роста ф-ии

**26) Экстремум ФМП. Необходимое и достаточное условие экстремума.**

**Опр.** Пусть определена на . Точка называется **точкой локального максимума(минимума)**, если такая, что (.

**Т (необходимое условие экстремума).** Если - точка экстремума и в ней существует частная производная , то она равна 0.

**Док.** Зафиксируем все , при чем , тогда . У этой ф-ии в точке – экстремум. По теореме Ферма для ф-ии одной переменной = . Поскольку k выбрано произвольно, то все частные производные равны 0. ◄

**Следствие.** Если в экстремум, то .

**Т (достаточное условие).** Пусть z = дважды дифф-ма в окрестности и выполнены условия

-

- – положительно (отрицательно) определённая квадратичная форма, то - точка минимума (максимума)

**Док:**  существует окрестность

= = \* + <-продолжение

Замены: =

* продолжение

(положительно определённая квадратичная форма)

Скажем, что она больше 0.

Мы имеем окружность, построенную вокруг , r=1 на этой окружности квадратичная форма положительна и непрерывна. Это значит (по т Вейерштрасса) эта ф-ия принимает на окружности своё наименьшее значение.

. Для этого М

В , ◄

**Алгоритм:**

1. = 0 Найти стационарные точки
2. для каждой точки
3. Определить точку экстремума в соответствии с теоремой

Наибольшее и наименьшее значение.

**Опр.** Если z=f(M) задана в некоторой замкнутой области и точка , такая что в этой области выполнено то говорят, что в глобальный минимум(экстремум).

**27) Условный экстремум**  
говорим об экстркмуме z=f(M) при выполн некот усл кот фактически устан-ет связь между независ перем-ми – ус**л связи.**  
**2 способа нахожд:** 1) z= f(x, – исследовать на экстремум 2) Метод Лагранжа   
**т (необх усл)** Если в (функция z=f(x,y) имеет условный экстремум при условии g(x,y) = C, то существует :   
Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание  
Grad f = для каждого Исп уровни связи выражаем dy через dx

**28) Двойной интеграл, его геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Вычисление.**

Кратные интегралы

G: называется квадрируемая P(G)

Будем называть открытой областью открытое связное множество.

Добавить границу – замкнутая область.

Двойной интеграл

Пусть – ограничено, значит

Будем называть диаметром области G: d=

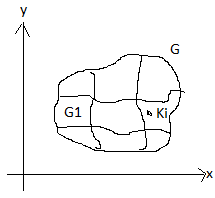
**Опр.** Пусть z=f(x,y) ограничена и определена в области G. G – квадрируема.

Разобьём G на квадрируемое Gi=,

Выберем

Составим сумму

Если сущ предел при независящий от способа разбиения и выбора точек,то его называют **двойным интегралом.**

 .. на области G

Если такой интеграл существует, то говорят, что интегрируема на G.

**Геометрический смысл двойного интеграла:**

Объём тела ограничен , поверхность

двойной интеграл по области *D* от непрерывной неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра с основанием *D.*

Изображение выглядит как текст, доска

Автоматически созданное описаниеНеобходимое и достаточное условие интегрируемости

Т.к. – ограниченная, то Тогда

Cуммы Дарбу

I

Можно доказать, что I , I

**Т.** Для того, чтобы существовали двойные интегралы от ограниченной ф-ии на квадрируемой области G, необходимо и достаточно, что I.

Изображение выглядит как текст, часы

Автоматически созданное описание

**Т.** Для того, чтобы двойной интеграл от ограниченной ф-ии на квадрируемой области G необходимо и достаточно, чтобы для существовало разбиваемое ,такое что

**Т.** Непрерывная и ограниченная ф-ия интегрируема на квадрируемой области G.

Вычисление двойного интеграла.

Рассмотрим ограниченную непрерывную функцию на области

Q={}.

**Т.** Пусть: 1) существует , 2) [a,b] cсуществует . Тогда существует определённый интеграл (повторный) и

Изображение выглядит как текст, доска

Автоматически созданное описание **Док:**

.

.

Просуммируем интегралы

. Умножаем на 🡪

– интегральная сумма для

Рассм область

Изображение выглядит как текст, доска

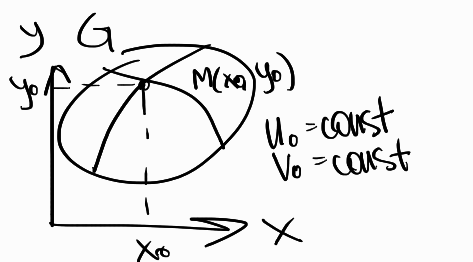
Автоматически созданное описание**Т.** Пусть Тогда

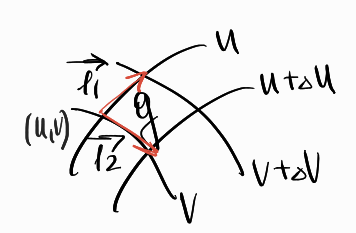
**Док:** Пусть c,d:

Введём ф-угла

**29) Замена переменной в двойном интеграле. Геометрический смысл якобиана.**

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ   
пусть f(x,y) задана в квадрируемой области G и ограничена в ней и пусть   
1)   
2)   
3) тогда справедлива формула   
**Док:** пусть u=u0=const, можно рассматривать как параметрическое задание некоторой кривой .

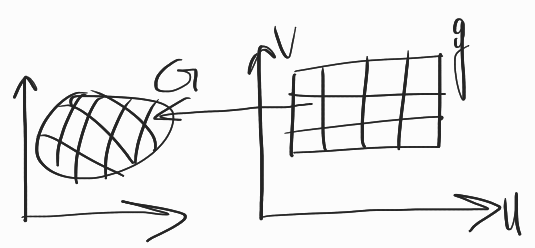
Для любых МG соответствуют 2 числа (U0,V0) которые можно рассматривать как её координаты (криволинейные) при этом если U=const то кривую называют координатной V-линией. Если V=const то – координатной U-линией.  
Аналогично для V=V0=const. эти две кривые пересекаются в точке М0(x0,y0)=

Заменяем площадь криволинейного четырехугольника площадью параллелограмма построенного на векторах.  
 Т Лагранжа о значении производной в промежуточных точках

P(G)=

Изображение выглядит как спортивная игра

Автоматически созданное описание Возьмём разбиение составим интегральную сумму   
вторая сумма есть интегрируемая сумма для ф-ии. (и что это значит)  
 перейдем к пределу при d -> 0   
 (

**ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ**

Изображение выглядит как объект, антенна

Автоматически созданное описание  
   
   
.

**Геометрический смысл Якобиана в двойном интеграле:** , (ТУТ ДВОЙНОЙ)

**Модуль Якобиана преобразования – коэффициент искажения площадей отражаемых областей.**

**30) Тройной интеграл. Вычисление. Замена переменной.**

**Опр**. Пусть кубируемое и на Т задана ограниченная ф-ия = f(M) .

Разобьём . Интегральная сумма , где . Если который не зависит от способа разбиения и выбора точки то его называют **тройным интегралом на области Т.** Обозначают . Ф-ия интегрируема на Т.

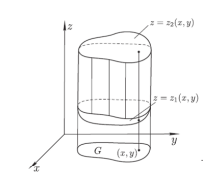
**Замеч.** Имеет место аналогичная Т о двойном интеграле. Тройные интегралы обладают такими же свойствами.

**Геом смысл.** ,

**Физ смысл.** плотность материала, из которого сделано тело Т, то -масса .

Вычисление тройного интеграла с каждого повторного.

Рассмотрим область Т = } G – квадрируемые, – непрерывны на G.

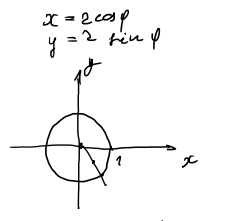
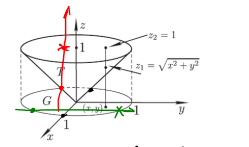


Пусть

1. Существует
2. .

Тогда существует повторный интеграл

**Следствие.** =



Сноски.

Т: ,z=1

G :

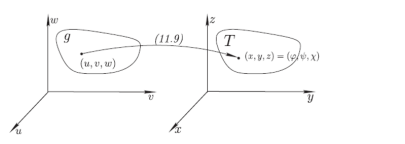
**Замечание.** Порядок интегрирования в повторном интеграле может быть любой.

Замена переменной в тройном интеграле

Рассм от переменных (x,y,z) перейдем к ( u,v,w) с помощью , y = , z= X(u,v,w) ((u,v,w)

Пусть вычислено:

1. Если (u,v,w) , то (x,y,z) = Причем имеет место взаимно однозначное соответствие
2. Ф-ии X(u,v,w) имеют непрерывные производные первого порядка и ≠0 вот эта хуета в модуле именуется модулем якобиана

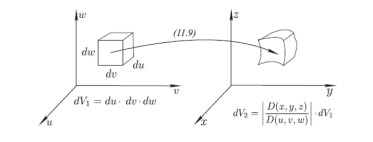
В силу (1) (u,v,w) однозначно определяет точку М(x,y,z) = М. Тройка – криволинейные координаты М. Если зафиксировать u=u0=const

, y = , z= X(u0,v,w) – параметрическое уравнение некоторой координатной поверхности в области Т.

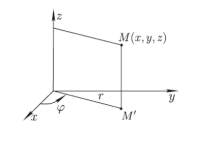
Если зафиксировать u=u0, v=v0 получим параметрическое уравнение кривой – координатная

w-линия.

Формулы перехода от (x,y,z) можно рассматривать как отображение области

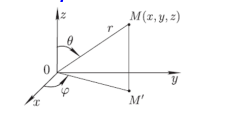
**Т.** Пусть g и T замкнутые кубируемые области. Ф-ия f ограничена и непрерывна в Т, тогда справедлива формула замены переменной .

Модуль Якобиана коэффициент растяжения объёма ри отображении

**Цилиндрические координаты**

=

**Сферические координаты**

.

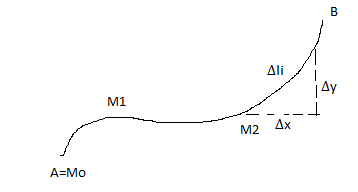
= +) + = =

=

**31) Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Геометрический и физический смысл.**

Рассматриваем кривую Lб, заданную параметрически . соответствует ровно одна точка M(x,y).

. На простой спрямляемой L задана ограниченные ф-ии f(x,y), P(x,y), Q(x,y).

Разобьём на n отрезков. Им будут соответствовать точки на L

длина дуги .

, ,х . На каждом []

Составим интегральные суммы:

.

**Опр.** Если существует которая не зависит от выбора точек и способов разбиения, то его называют криволин интегралом рода. Обознач:

**Замечание.** Из определения видно, что криволинейный интеграл рода не зависит от того, в каком направлении мы движемся на кривой.

**Геометрический смысл.** Если f(x,y)

**Физический смысл.** – плотность в точке некоторой мат-ной кривой масса кривой.

**Опр.** Если существует k=1,2 не зависящим от способов разбиения и выбора точек, то его называют **криволинейным интегралом рода.** Обозначают ,

**Общий интеграл рода:**

**Замечание.** Криволинейный интеграл рода зависит от направления, т.к. при движении в другую сторону меняются знаки

**Физический смысл.** Если сила направления воздействия задаётся

Подынтегральная ф-ия ( – работа, которую нужно приложить, чтобы переместить т. от А к В.

**Замечание.** Все свойства: линейность, аддитивность, оценки, средние значения, которые были рассмотрены для определённых интегралов, присуще и криволинейным.

**Замечания.** Криволинейные интегралы в пространстве определяются аналогично.

Если , то скалярное произведение

**Замечание.** Если криволинейный интеграл II рода определён на замкнутой кривой, то при обозначении не указывают направление .

Будем считать положительным обход, если область, ограниченная этой кривой, остаётся слева

**32) Вычисление криволинейных интегралов.**

Вычисление криволинейного интеграла I рода с помощью определённого.

**Т.** Пусть f(x,y) ограниченная определена на простой спрямляемой кривой L: причём имеют непрерывные производные и (гладкая).

Тогда

**Док:**

Поскольку f(x,y) непрерывная, то она и равномерно непрерывная, что означает выполнено

l – длина кривой.

1. L задана параметрически
2. L задана явно
3. L задана в полярных координатах

**2 РОДА:**

1. Параметрически
2. Явно

**33) Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.**

Пусть кривая АВ задана уравнением: y = y(x) a<=x<=b. Введем угол α(х) между касат к кривой и положит направл ОХ. К точке (x;y) , причем направление на касательной согласуем с направл движения по кривой, то есть:

от A к B: , tg(α) = y’(x).

от В к А:

Рассм интеграл 2 рода:

Аналогично:

Введем **F(x,y)** = P(x,y)**i** + Q(x,y)**j τ** = (cos(α), sin(α))

**34) Формула Грина.**

Пусть заданы ф-ии y = y1(x), y = y2(x), y1(x)<y2(x), a<=x<=b

**Опр:** область G , кот сост их т.(x,y): {y1(x) <= y <= y2(x), a <= x <= b} наз **у-трапециевидной**

**Опр:** область G наз **простой**, если ее можно разбить на у-трапециевидные области, кот не имеют общих точек.

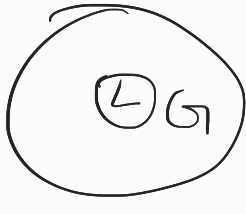
Пусть область G ограничена кусочно-гладкой кривой L

**Т(формула Грина):** пусть ф-ии P(x,y) и Q(x,y)заданы простой областью G и частные производные непрерывны. Тогда двойной интеграл по области G:

**Док:** докажем, что .b Разобьем G на у-трапециевидные. Рассм интегралы на Gi:

Аналогично, разбивая на х-трапециевидные, получим, что ◄

**35) Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.**

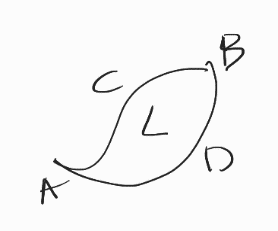


**Опр:** область называется односвязной если для любого замкнутого контура L c G, область ограничена этим контуром, полностью лежит в G.

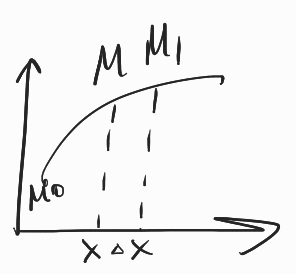
**Т I:** пусть P(x,y) G(x,y) непрерывные в некоторой односвязной области G тогда следует утверждение эквивалентности   
(1)   
(2)   
(3) выражение Pdx+Qdy является полным дифференциалом некоторой ф-ии U(x,y), причем

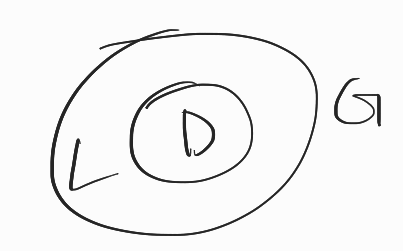
**I I:** Если при этом G – односвязная (4)

**I:** (1) -> (2) -> (3) -> (1) **I I:** (3) -> (4) -> (1)

1. -> (2)  
   
2. -> (3)

Зафиксируем точку и производную M(x,y). не зависит от пути. Этот интеграл есть ф-ия (x,y). Рассмотрим дифференциал   
   
(

  
.

1. -> (1)
2. -> (4)  
   U(x,y) :   
    так как непрерывны то векторное произведение совпадёт. 
3. -> (1)  
   из односвязности имеем D принадлежит G. Для D запишем формулу Грина:

**36) Понятие площади поверхности. Вычисление в различных системах координат.**

Пусть пов-сть задана ур-ием z = f(x,y) причем (x,y)∈G, ф-ия дифф-ма на G.

Разобьем Р кусочно-гладкими кривыми на n частей.

Обозначим проекцию обл Pi на плоскоть XOY как Gi.

Возьмем произвольн точку Mi(xi,yi,zi) Mi∈Pi, zi = f(xi, yi).

Проведем касат плоскость в пов-ти в этой точке.

Обознач Si площадь части касат плск-сти, кот проец на Gi. Запишем сумму:

**Опр:** Пределом суммы Si(Pi, Mi) наз. числом S, если Если этот предел сущ-ет и не зависит от способа разб. И выбора точек, то S наз-ся **площадью P** , а саму пов-ть квадрируемой

**Т:** пусть P задана ф-ией z=f(x,y) на огранич замкн области G, и имеет непр частные производные fx(x,y) fy(x,y) (пов-ть гладкая). Тогда P квадрируема и

**Док:** возьмем произв. т Mi(xi,yi,zi), Mi ∈ Pi, zi = f(xi, yi).

Пров как пл в пов в этой точке.

Ур-ие пл-ти: z-zi=fx(xiyi)(x-xi)-fy(xiyi)(y-yi); **n**1( fx(xi yi); -fy(xi, yi) ; -1)

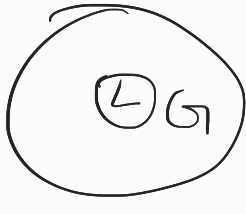
Введем в рассм угол γi между вект нормали и осью OZ:

z=0 **n2** = (0 ; 0 ; 1).

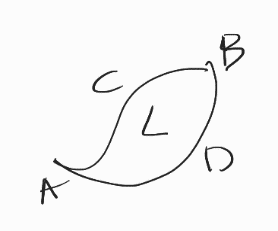
Справа стоит инт сумма, для ф-ии ◄

-Пусть пов задана параметр: P: x = φ(u,v) y=ψ(u,v) z=χ(u,v) Каждой т (u,v) ∈ g соотв т. M(x,y,z). Можем задать вектор **OM** = x**i** + y**j** + z**k** . **OM** = φ(u,v)**i**+ψ(u,v)**j**+χ(u,v)**k**

**37) Поверхностный интеграл 1-го рода. Вычисление.**

**Опр:** область называется односвязной если для любого замкнутого контура L c G, область ограничена этим контуром, полностью лежит в G.

**Т I:** пусть P(x,y) G(x,y) непрерывные в некоторой односвязной области G тогда следует утверждение эквивалентности   
(1)   
(2)   
(3) выражение Pdx+Qdy является полным дифференциалом некоторой ф-ии U(x,y), причем

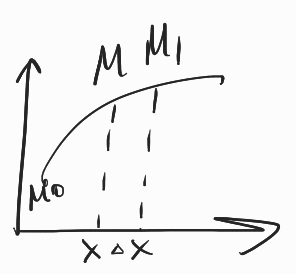
**I I:** Если при этом G – односвязная (4)

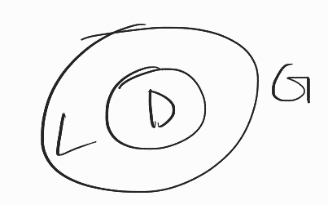
**I:** (1) -> (2) -> (3) -> (1) **I I:** (3) -> (4) -> (1)

1->2

2->3

Зафиксируем точку и производную M(x,y). не зависит от пути. Этот интеграл есть ф-ия (x,y). Рассмотрим дифференциал   
   
(



1. -> (4)  
   U(x,y) :   
    так как непрерывны то векторное произведение совпадёт. 

3->1  
из односвязности имеем D принадлежит G. Для D запишем формулу Грина:

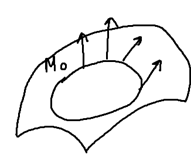
**38) Понятие стороны поверхности. Поверхностный интеграл 2-го рода. Вычисление.**

1. Понятие стороны поверхности

Пусть P поверхность, заданная явно z=f(x,y). В каждой точке M существует касательная плоскость. Есть нормаль . Образуется вектор-ф-ия. Будем считать, что эта вектор-ф-ия непрерывна (это непрерывность каждой её координаты).

**Опр.** Стороной пов-ти будем называть множество всех её точек, для которых непрерывная вектор-ф-ия.

**Замечание.** Если – непрерывная вектор-ф-ия, то тоже непрерывная. Сторона поверхности соответствующая - это вторая сторона поверхности. Такая поверхность называется двухсторонней.

Характерной особенностью двухсторонней поверхности является то, что, если на ней выбрать некоторых замкнутый контур и двигаться вдоль него, то вектор-ф-ия будет непрерывно меняться, но при возвращении в исходную точку этот вектор нормали останется прежним.

Пример - сфера. Если поверхность Р задана параметрически, то в качестве вектора нормали . Если непрерывность не сохраняется (при том, что в каждой М он существует), то поверхность называется односторонней.

2.Поверхностный интеграл второго рода.

Р – двухсторонняя поверхность. Выберем одну из сторон этой поверхности. Обозначим углы образованные с осями координат.

И рассмотрим ф-ии на Р:

**Как их вычислять:**

Если P задана z=f(x,y), то

для остальных аналогично.

Если ввести вектор-функцию

Физическая интерпретация:

поток жидкости через всю поверхность

поток векторного поля

**Опр.** Обобщенным поверхностным интегралом 2го рода называют ; P:

**39) Формула Остроградского-Гаусса.**

Пусть . D замкнутая, связная область   
такую G будем называть z-цилиндрической  
**Т (формула О-Г):** пусть ф-ии P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z,) и их первые производные непрерывны в области G, ограниченной поверхностью. Тогда справедлива формула   
**Док:** G – z-цилиндрическая.

G-произвольное. Разбиваем на z-цилиндрические: каждое по указанной формуле. ◄  
**Замечание:** Рассмотрим векторную функцию на скалярную величину, которую называют дивергент .

**Следствие:** если

**40) Формула Стокса.**

Пусть дана гладкая поверхность Р, ограниченная контуром L. Ориентируем эту поверхность. Будем считать положительным направлением обходя контур согласованным с ориентацией поверхности. Такое направление при котором наблюдатель стоящий так, что вектор нормали к поверхности идёт от ног к голове , обходит контур так, что поверхность остается слева.

**Опр:** поверхность называется xyz-проектирующий если она однозначно проецируется на координатные плоскости. Её можно задать одним из уравнений:

**Т (формула Стокса):** пусть ф-ии P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z,) и их первые производные непрерывны в области G. P(x,y,z) – проецируемая с контуром L в G. Тогда справедлива формула

Пусть P задана . Докажем

Будем считать, что l:x=ϕ(t),

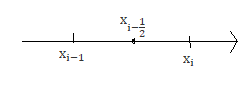
На плоскости справедлива формула Грина   
имеет координаты пропорц единичному вектору нормали. (  
   
   
   
   
**Замеч**: вектор-ф-ия называется ротором

rot   
**Замечание:** если Р не xyz-проецируемая, то её можно разбить на конечное число xyz проекций (формула справедлива)  
**Замечание:** если Р лежит в одной из координатных плоскостей, формула работает, но она превращается в формулу Грина.

14) док-во  
прямоугольники: R= – =

= = x = (-) (=h)

По формуле Тейлора .. = + ( -)+ ∈ [x; ]

= + КРАСНОЕ = = = 0.  =

R= ≤ = max [a,b]

= = ; =; =; \* \*~~n~~ (cократили)

ε – произвольная погрешность n>